Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине

«Дифференциальная геометрия»

Инструкция для студентов

Общее время выполнения заданий ***80*** *минут.*

Оценочное средство включает 3 задания. Тип заданий – со свободно конструируемым ответом (СКО). Задание данного типа предполагает составление развернутых ответов, произвольных по содержанию и форме представления и включающих полное решение задачи (описание проблемы) с пояснениями.

1. Кривизна и кручение кривой.
2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрически.
3. Кривая в пространстве задана радиус-вектором

$$\vec{r}\,(t)=\{a\,Cos\,t,\ a\,Sin\,t,\ bt\},\ a, b \in Z,\ a, b >0,\ t \geq 0.$$

Выяснить расположение кривой в пространстве и по возможности нарисовать ее.

Эталон ответов на Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Дифференциальная геометрия»

Задание 1. Кривизна и кручение кривой.

Пусть g - гладкая кривая на плоскости или в пространстве.

1) Рассмотрим касательный вектор $\vec{v}(s)=\vec{r}\,'(s)$, где s – натуральный параметр на кривой g. Полагая в (4.3) $t=s$ имеем $\left|\vec{r}\,'(s)\right|=1$, то есть вектор $\vec{v}(s)=\vec{r}\,'(s)$ имеет единичную длину. Можно считать, что модуль вектора скорости относительно натурального параметра равен единице.

Вектор $\vec{v}(s)=\vec{r}\,'(s)$, $\left|\vec{v}(s)\right|=1$, называется *единичным вектором касательной.*

2) Рассмотрим вектор $\vec{w}(s)=\vec{t}\,'(s)=\vec{r}\,''(s)$. Он называется *вектором кривизны* кривой.

Выясним расположение вектора $\vec{w}(s)$. Для этого воспользуемся традиционным для дифференциальной геометрии приемом: дифференцирование тождеств.

Рассмотрим тождество $\left(\vec{v}(s);\vec{v}(s)\right)=1$ и продифференцируем его по *s:*

$$\left(\vec{v}\,'(s);\vec{v}(s)\right)+\left(\vec{v}(s);\vec{v}\,'(s)\right)=0,$$
$$2\left(\vec{v}\,'(s);\vec{v}(s)\right)=0,$$
$$\left(\vec{w}(s);\vec{v}(s)\right)=0.$$

Это означает, что вектор кривизны перпендикулярен вектору касательной: $\vec{w}(s)\perp\vec{v}(s)$.

Для любого вектора $\vec{a}(t)$ постоянной длины $\left|\vec{a}(t)\right|=const$ аналогично можно показать, что $\vec{a}\,'(t)\perp\vec{a}(t)$.

Для плоских кривых это означает, что $\vec{w}(s)$ является направляющим вектором нормали к кривой.

Для кривых в пространстве это означает, что вектор $\vec{w}(s)$ параллелен нормальной плоскости к кривой.

С другой стороны, вектор $\vec{w}(s)$ лежит в соприкасающейся плоскости (соприкасающаяся плоскость параллельна векторам $\vec{r}\,'(t),\ \vec{r}\,''(t)$ вне зависимости от выбора параметра на кривой).

Следовательно, вектор $\vec{w}(s)$ является направляющим вектором главной нормали к кривой.

Найдем его длину $k(s)=\left|\vec{w}(s)\right|$.

Определение. *Кривизной кривой* в данной точке называется длина вектора кривизны в этой точке:

$$k(s)=\left|\vec{w}(s)\right|.$$

Рассмотрим вектор $\vec{n}(s)=\dfrac{\vec{w}(s)}{\left|\vec{w}(s)\right|}=\dfrac{\vec{w}(s)}{k(s)},\ \left|\vec{n}(s)\right|=1.$

Вектор $\vec{n}(s)=\dfrac{\vec{w}(s)}{k(s)},\ \left|\vec{n}(s)\right|=1,$ называется *единичным вектором нормали* кривой в случае плоской кривой и *единичным вектором главной нормали* кривой в случае кривой в трехмерном пространстве.

Из определений кривизны $k(s)$ и нормального вектора $\vec{n}(s)$ следует, что

$$\vec{v}\,'(s)=k\vec{n}(s).$$

Мы определили кривизну кривой как функцию натурального параметра s. Можно считать, что кривизна – модуль вектора ускорения относительно натурального параметра.

Более наглядный смысл имеет следующее определение.

Определение.

Пусть g - гладкая кривая в пространстве. Пусть M_0 и M – две произвольные точки кривой. Рассмотрим касательные к кривой в точках M_0 и M. Обозначим через Δq угол между касательными, а Δs - длину кривой от M до M_0.

Кривизной кривой в данной точке M_0 называется предел отношения

$\dfrac{\Delta q}{\Delta s}$ при стремлении $M \to M_0$:

$$k(M_0) = \theta'(s) = \lim_{M \to M_0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Теорема. Определения кривизны кривой эквивалентны.

Определение. *Радиусом кривизны* ρ *кривой* в данной точке называется величина, обратная кривизне кривой в этой точке:

$$\rho = \frac{1}{k}, \text{ если } k \neq 0, \text{ и } \rho = +\infty, \text{ если } k = 0.$$

Следствие. Кривизна и радиус кривизны кривой являются геометрическими свойствами кривой и не зависят от выбора параметризации кривой.

Теорема. Для того чтобы гладкая кривая была прямой, отрезком или лучом необходимо и достаточно, чтобы кривизна равнялось нулю в каждой точке этой кривой.

Следствие. Кривизна кривой является мерой отклонения кривой от ее касательной.

Пример. Кривизна дуги окружности радиуса R во всех точках равна $\dfrac{1}{R}$.

3) Для кривых в трехмерном пространстве рассмотрим вектор $\overrightarrow{b(s)} = \left[\overrightarrow{v(s)}, \overrightarrow{n(s)}\right]$.

Он имеет единичную длину как векторное произведение взаимно ортогональных единичных векторов $\vec{v}$, $\vec{n}$.

Вектор $\vec{b}(s)$, $\left|\vec{b}(s)\right| = 1$, называется *единичным вектором бинормали* кривой.

Определение. *Кручением кривой* в данной точке называется длина вектора $\vec{b}'(s)$, где $\vec{b}(s)$ - единичный вектор бинормали кривой, s - натуральный параметр на кривой:

$$\chi(s) = \left|\vec{b}'(s)\right|.$$

Мы определили кручение кривой как функцию натурального параметра s. Более наглядный смысл имеет следующее определение.

Определение.

Пусть γ - гладкая кривая в пространстве. Пусть M_0 и M – две произвольные точки кривой. Рассмотрим соприкасающиеся плоскости к кривой в точках M_0 и M и соответствующие нормали к ним (бинормали к кривой в точках M_0 и M). Обозначим через $\Delta\vartheta$ угол между бинормалями, а Δs - длину кривой от M до M_0.

Кручением кривой в данной точке M_0 называется предел отношения

$\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}s}$ при стремлении $M ® M_0$:

$$c\left(M_0\right) = J'(s) = \lim_{M ® M_0} \frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}s}.$$

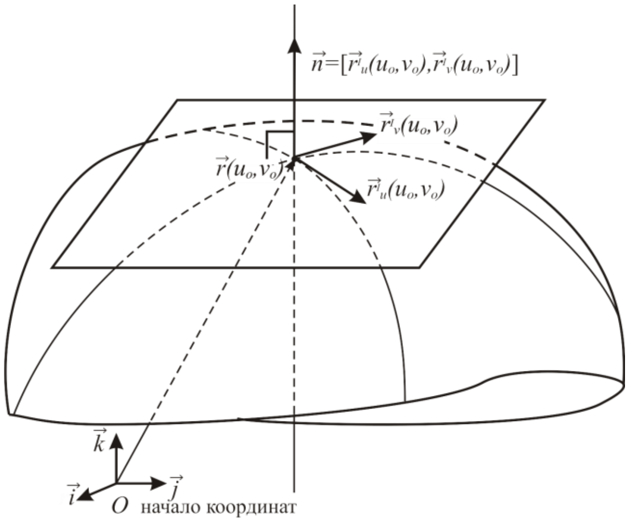
Теорема. Определения кручения кривой эквивалентны.

Следствие. Кручение кривой является геометрическим свойствами кривой и не зависит от выбора параметризации кривой.

Задание 2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрически.

Пусть поверхность задана параметрически:

$$\vec{r}(u;v) = \{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$$



1) Напишем уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $(u_0;v_0)$.

Уравнение касательной плоскости запишем сначала, например, в параметрическом виде. Для этого надо знать координаты точки плоскости и двух неколлинеарных векторов, компланарных плоскости.

Координаты точки плоскости равны координатам вектора

$$\vec{r}(u_0;v_0) = \{x(u_0;v_0); y(u_0;v_0); z(u_0;v_0)\}.$$

В качестве искомых векторов возьмем касательные векторы к координатным линиям.

Для координатной линии $\vec{r}(u;v_0)=\{x(u;v_0);y(u;v_0);z(u;v_0)\}$ -

это вектор $\vec{r}'_u(u;v_0)=\{x'_u(u;v_0);y'_u(u;v_0);z'_u(u;v_0)\}$. В точке $(u_0;v_0)$ он имеет координаты $\vec{r}'_u(u_0;v_0)=\{x'_u(u_0;v_0);y'_u(u_0;v_0);z'_u(u_0;v_0)\}$.

Для координатной линии $\vec{r}(u_0;v)=\{x(u_0;v);y(u_0;v);z(u_0;v)\}$ -

это вектор $\vec{r}'_v(u_0;v)=\{x'_v(u_0;v);y'_v(u_0;v);z'_v(u_0;v)\}$. В точке $(u_0;v_0)$ он имеет координаты $\vec{r}'_v(u_0;v_0)=\{x'_v(u_0;v_0);y'_v(u_0;v_0);z'_v(u_0;v_0)\}$.

Параметрическое уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\begin{cases} x=x(u_0;v_0)+x'_u(u_0;v_0)u+x'_v(u_0;v_0)v \\ y=y(u_0;v_0)+y'_u(u_0;v_0)u+y'_v(u_0;v_0)v, \quad u,v\in\Re. \\ z=z(u_0;v_0)+z'_u(u_0;v_0)u+z'_v(u_0;v_0)v \end{cases}$$

Общее уравнение касательной плоскости получим из равенства

$$\begin{vmatrix} x-x(u_0;v_0) & x'_u(u_0;v_0) & x'_v(u_0;v_0) \\ y-y(u_0;v_0) & y'_u(u_0;v_0) & y'_v(u_0;v_0) \\ z-z(u_0;v_0) & z'_u(u_0;v_0) & z'_v(u_0;v_0) \end{vmatrix}=0$$

2) Напишем уравнение нормали к поверхности, проходящей через точку $(u_0;v_0)$.

В качестве направляющего вектора нормали возьмем векторное произведение касательных векторов к координатным линиям в данной точке

$\vec{n}(u_0;v_0)=\left[\vec{r}'_u(u_0;v_0);\vec{r}'_v(u_0;v_0)\right]$. Обозначим координаты нормального вектора через $\{a;b;c\}$.

Уравнение нормали к поверхности в точке $(u_0;v_0)$ запишем в параметрическом виде

$$\begin{cases} x=x(u_0;v_0)+at \\ y=y(u_0;v_0)+bt, \quad t\in\Re. \\ z=z(u_0;v_0)+ct \end{cases}$$

Задание 3. Кривая в пространстве задана радиус-вектором

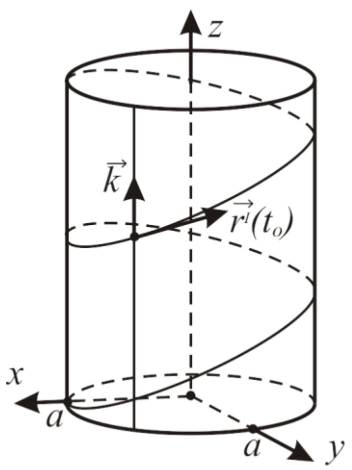
$$\vec{r}\,(t)=\{a\,Cos\,t,\ a\,Sin\,t,\ bt\},\ a,\ b\in Z,\ a,\ b>0,\ t\geq 0.$$

Выяснить расположение кривой в пространстве и по возможности нарисовать ее.

Решение.

Заметим, что $\dfrac{x^2(t)}{a^2}+\dfrac{y^2(t)}{a^2}=1$. Следовательно, кривая лежит на круговом цилиндре с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$. С ростом параметра t точка кривой движется по цилиндру в направлении оси *Oz*.

Итак, кривая является винтовой линией, начинающейся на плоскости *Oxy* от точки $(a;0;0)$.



Покажем, что все касательные к винтовой линии образуют один и тот же по величине угол с образующими цилиндра.

Образующие кругового цилиндра – это лежащие на нем прямые. Образующие цилиндра параллельны друг другу и для данного кругового цилиндра параллельны оси Oz. В качестве направляющего вектора образующих возьмем направляющий вектор $\vec{k}=\{0,0,1\}$ оси Oz.

Угол γ между винтовой линией на цилиндре и образующей цилиндра в точке их пересечения – это угол между касательным вектором $\vec{r}\,'(t)$ к винтовой линии и направляющим вектором образующей.

$$Cos\gamma=\frac{(\vec{r}\,'(t),\vec{k})}{|\vec{r}\,'(t)|\cdot|\vec{k}|}.$$

Радиус-вектор винтовой линии $\vec{r}(t) = \{aCos\,t\,, aSint, bt\}, \quad t \in R$. Касательный вектор к винтовой линии $\vec{r}\,'(t) = \{-aSint, aCos\,t, b\}$. Следовательно,

$$Cos\gamma = \frac{-aSint \cdot 0 + aCos\,t \cdot 0 + b \cdot 1}{\sqrt{(-aSint)^2 + (aCos\,t)^2 + b^2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

Угол γ – постоянный.