Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Теория вероятности»

Инструкция для студентов

*Тест включает 23 задания. На выполнение теста отводится **120 минут**. Задания рекомендуется выполнять по порядку, не пропуская ни одного, даже самого лёгкого. Когда задание не удаётся выполнить сразу, перейдите к следующему. Останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.*

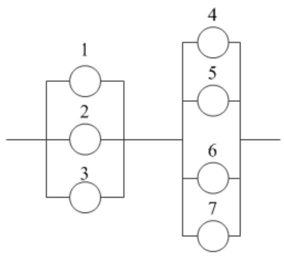
Тест содержит задания, ответ на которые надо дать в свободной форме. Для ответа на задания используйте специальный бланк.

Решите задачи и обязательно приведите подробное решение задач. Все утверждения, содержащиеся в решении задач, должны быть обоснованы и логически следовать из условия задачи.

Вариант №1

1. В каждом из двоичных разрядов датчика случайных чисел с равной вероятностью могут оказаться «0» или «1». Найти вероятность того, что в случайно зарегистрированном числе, имеющем 8 двоичных разрядов, в половине разрядов будут нули.

2. Вероятность отказа каждого элемента в течение времени T равна p. Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Требуется написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.



3. Для условий задания 2 найти вероятность события B.

4. Для условий задания 2 вычислить $P(B)$ при $p = 1/2$.

5. Заготовки для серийного производства поступают из 1-го и 2-го литейных цехов в соотношении 3:2 и могут быть как стандартными, так и нестандартными. Для 1-го цеха нестандартные заготовки составляют 5%, а для второго цеха – 10% от всей продукции. При изготовлении детали из стандартной заготовки вероятность брака равна 0,02, а из нестандартной – 0,25. Какова вероятность изготовления бракованной детали из случайно выбранной заготовки?

6. Для условий задания 5 определить, из какой случайно выбранной заготовки, стандартной или нестандартной, более вероятно изготовление бракованной детали?

7. Испытываются независимо n приборов. Вероятность выхода из строя любого прибора равна p. По условию партия приборов принимается, если выйдет из строя не более одного прибора. Найти вероятность приёма партии. Вычислить эту вероятность при $n=50$ и $p=0.02$ с помощью точной формулы Бернулли.

8. Для условий задания 7 вычислить ту же вероятность с помощью приближённой формулы Пуассона.

9. Число X заявок на ремонт станков в цеху за время $t=1$ час распределено по закону Пуассона с параметром $a=2$. Найти вероятность того, что за первый час работы заявок будет меньше двух, а за второй час – не меньше двух.

10. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайно величины X:

$$f(x)=\begin{cases} Cx \text{ при } x\in[0,1], \\ C \text{ при } x\in[1,2], \\ 0 \text{ при } x\notin[0,2]. \end{cases}$$ Найти C.

11. Для условий задания 10 найти функцию распределения $F(x)$

12. Для условий задания 10 найти математическое ожидание m_X.

13. Для условий задания 10 найти дисперсию D_X.

14. Для условий задания 10 найти среднеквадратическое отклонение σ_X.

15. Для условий задания 10 найти $P(|X-m_X|<\sigma_X)$.

16. По количеству X содержащейся примеси продукт разделяется на две группы. Продукт первой группы содержит примесь в количестве, меньшем 1%. В противном случае продукт относят ко второй группе. X – случайная величина, распределённая нормально с параметрами $m=1.5\%$ и $\sigma=0.5\%$. Найти, сколько процентов в общем объёме продукции составляют продукты первой и второй групп.

17. Детали на производстве сортируются на 4 группы по величине отклонений от номиналов двух существенных параметров. Отклонения ранжируются. Ранги X, Y отклонений могут принимать лишь значения 0 и 1. Распределение двумерной случайной величины (X,Y) задано таблицей.

X \ Y	0	1

0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

Здесь $p_{11} = 0.94$, $p_{12} = 0.01$, $p_{21} = 0.02$, $p_{22} = 0.03$. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY}, называемый ранговым.

18. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y):

$$f_{XY} = \begin{cases} C\left(x^2 + y^2\right) & \text{при } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$ Найти C.

19. Для условий задания 18 найти $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

20. Для условий задания 18 вычислить m_X, m_Y.

21. Для условий задания 18 вычислить σ_X, σ_Y.

22. Для условий задания 18 вычислить ρ_{XY}.

23. Для условий задания 18 выяснить, зависимы или нет X, Y.

Эталон ответа на Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Теория вероятности»

Задание № 1	**Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2**
Применяем классическое определение вероятности. Общее число случаев $n = 2^8$ – число размещений с повторениями из двух элементов по 8, так как случаи могут отличаться друг от друга как числом повторений нулей и единиц, так и порядком их следования в восьми рядах. Число благоприятствующих исходов $m = C_8^4$ – число сочетаний из восьми элементов по четыре, так как благоприятствующие случаи отличаются друг от друга разрядами, в которых стоят нули. Порядок разрядов безразличен. Тогда $p = \frac{m}{n} = \frac{C_2^4}{2^8} = \frac{35}{128} = 0.273$.	

Задание № 2	**Максимальное количество баллов за правильный ответ – 3**
Цепь состоит из двух последовательно включенных блоков. Присвоим им номера 1, 2 слева направо. Пусть B_1 – событие, означающее отказ первого блока, а B_2 – отказ второго блока за время T. Тогда $B = B_1 + B_2$, т.к. отказ цепи происходит при отказе хотя бы одного блока. Элементы в каждый блок включены параллельно, поэтому отказ блока происходит при отказе всех элементов, в него входящих. Отсюда $B_1 = A_1A_2A_3$, $B_2 = A_4A_5A_6$. $B = A_1A_2A_3 + A_4A_5A_6$	

Задание № 3	**Максимальное количество баллов за правильный ответ – 1**
Элементы работают независимо, поэтому события $A_1,..,A_7$ взаимно независимые. Применяем теорему сложения вероятностей для двух любых событий и теорему умножения вероятностей для взаимно независимых событий. $P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1B_2) = p^3 + p^4 - p^7$.	

Задание № 4	**Максимальное количество баллов за правильный ответ – 1**
$P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{128} \approx 0.18$	

Задание № 5	**Максимальное количество баллов за правильный ответ – 3**
Введём обозначения событий: A – деталь окажется бракованной, B_1 – заготовка изготовлена в первом цеху, B_2 – заготовка изготовлена во втором цеху, H_1 – стандартная заготовка, H_2 – нестандартная заготовка. Находим вероятности из условий: $P(B_1) = 0.6$, $P(B_2) = 0.4$, $P(H_1 / B_1) = 0.95$, $P(H_1 / B_2) = 0.9$, $P(A / H_1) = 0.02$, $P(A / H_2) = 0.25$. По формуле полной вероятности находим $P(H_1) = P(B_1)P(H_1 / B_1) + P(B_2)P(H_1 / B_2) = 0.93$, $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0.07$. Вторично используя формулу полной вероятности, находим искомую вероятность: $P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) = 0.0.0361$	

Задание № 6	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
С помощью формулы Байеса получаем $P(H_1/A)\approx 0.515$, $P(H_2/A)\approx 0.485$. Сравниваем эти две вероятности и получается, что более вероятно изготовление бракованной детали из стандартной заготовки.	

Задание № 7	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 4
Испытания приборов укладываются в схему Бернулли. Пусть X – число вышедших из строя приборов при испытании. Искомая вероятность есть $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$. $P(X\le 1)\approx 0.36417+0.37160=0.73577$	

Задание № 8	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 4
С помощью приближённой формулы Пуассона получаем $P(X\le 1)=\frac{a^0}{0!}e^{-a}+\frac{a}{1}e^{-a}=(1+a)e^{-a}$, где $a=np=50\cdot 0.02=1$; $P(X\le 1)\approx 0.73576$.	

Задание № 9	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 7
$p=P(X<2)\cdot P(X\ge 0)=P(X<2)\cdot(1-P(X<2))$ $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=P(X<2)=\frac{a^0}{0!}e^{-a}+\frac{a}{1!}e^{-a}=0.4059\approx 0.41$. Отсюда $p\approx 0.41\cdot(1-0.41)=0.24$.	

Задание № 10	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 3
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Это свойство есть условие для нахождения С. $\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^1 Cx\,dx+\int_1^2 C\,dx+\int_2^{+\infty}0\,dx=\frac{C}{2}+C=1$; отсюда $C=2/3$.	

Задание № 11	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ При $x\le 0$ $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt=0$. При $0\le x\le 1$ $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^x\frac{2}{3}tdt=\frac{x^2}{3}$. При $1\le x\le 2$ $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^1\frac{2}{3}tdt+\int_1^x\frac{2}{3}dt=\frac{1}{3}(2x-1)$. При $x\ge 2$ $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^1\frac{2}{3}tdt+\int_1^x\frac{2}{3}dt+\int_2^{\infty}0\,dt=1$.	

Задание № 12	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
$m_X=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^1\frac{2}{3}x^2dx+\int_1^2\frac{2}{3}xdx+\int_2^{\infty}0\,dx\approx 1.22$.	

Задание № 13	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 3
Находим $D_X=\alpha_2-m_X^2$. $\alpha_2=M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx+\int_1^2\frac{2}{3}x^2dx+\int_2^{\infty}0\,dx=\frac{31}{18}$, $D_X=\frac{31}{18}-\frac{121}{81}\approx 0.228$.	

Задание № 14	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 1

$\sigma_X = \sqrt{D_X} \approx 0.48$

Задание № 15	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
$P(\lvert X - m_X\rvert < \sigma_X) \approx P(\lvert X - 122\rvert < 0.48)$= =$P(1.22 - 0.48 < X < 1.22 + 0.48) \approx 0.62$.	

Задание № 16	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 5
Пусть $x^2_{1/4}/3 = 1/4$, где $F(x) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$. Здесь $\Phi_0(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$– нормированная функция Лапласа. $F(1) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{1-1.5}{0.5}\right) = 0.159$. $p_1 = 0.1599 \sim 15.9\%$, $p_2 = P(X \geq 1) = 1 - p_2 = 0.841 \sim 84.1\%$.	

Задание № 17	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 9

Находим таблицы распределения компонент X, Y, используя формулы согласованности. Для этого складываем вероятности таблицы по сторонам и столбцам.

X	0	1
p	0.95	0.05

Y	0	1
p	0.96	0.04

$m_X = 0 \cdot 0.95 + 1 \cdot 0.05 = 0.05$; $m_Y = 0 \cdot 0.96 + 1 \cdot 0.04 = 0.04$,
$\alpha_{2X} = \mathrm{M}[X^2]$, $m_X = 0 \cdot 0.95 + 1 \cdot 0.05 = 0.05$;
$\alpha_{2Y} = \mathrm{M}[Y^2]$, $\alpha_{2Y} = 0^2 \cdot 0.96 + 1^2 \cdot 0.04 = 0.04$,
$D_X = \alpha_{2X} - m_X^2 = 0.05 - 0.0025 = 0.0475$;
$D_Y = \alpha_{2Y} - m_Y^2 = 0.04 - 0.0016 = 0.0384$.
$\sigma_X = \sqrt{D_X} \approx 0.218$, $\sigma_Y = \sqrt{D_Y} \approx 0.196$.
$\mathrm{M}[XY] \approx 0 \cdot 0 \cdot 0.94 + 0 \cdot 1 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0 \cdot 0.02 + 1 \cdot 1 \cdot 0.03 = 0.03$,
$K_{XY} = \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y = 0.03 - 0.05 \cdot 0.04 = 0.03 - 0.002 = 0.028$,
$\rho_{XY} = K_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y) \approx 0.66$.

Задание № 18	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 3
Коэффициент C находим из условия $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\,(x,y)dxdy = 1$: $C\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)\,dy = C\left(\int_0^1 x^2\,dx\int_0^1 dy + \int_0^1 y^2\,dy\int_0^1 dx\right) = \frac{2}{3}C = 1$; отсюда $C = 3/2$.	

Задание № 19	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
Применяем формулы согласованности: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\,(x,y)dy = \frac{3}{2}\int_0^1(x^2+y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)$ при $x \in [0,1]$ $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0,1]$. $f_Y(y)$ записываем из условия равноправности вхождения переменных x, y в выражение для $f_{XY}(x,y)$: $f_Y(y)$ при $y \in [0,1]$, $f_Y(y) = 0$ при $y \notin [0,1]$.	

Задание № 20	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 1
$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{5}{8}$; $m_Y = \frac{5}{8}$	

Задание № 21	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
$x \notin [0,1]$, $D_X = \alpha_{2X} - m_X^2$: $\alpha_{2X} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{7}{15}$; $D_X = \frac{7}{15} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 \approx 0.076$; $\sigma_X = \sqrt{D_X} \approx 0.0276$, $\sigma_Y = 0.0276$.	

Задание № 22	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 2
Предварительно найдём $\mathrm{M}[XY]$и $K_{XY} = \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y$: $\mathrm{M}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)dxdy = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 xy\,(x^2 + y^2)dxdy = \frac{3}{8}$; $K_{XY} = \frac{3}{8} - \frac{25}{64} = -\frac{1}{64}$; $\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \approx -0.205$.	

Задание № 23	Максимальное количество баллов за правильный ответ – 1
Т.к. $\rho_{XY} \neq 0$, то X, Y зависимы.	